**Дифференцирование функции, заданной неявно**

**Определение.** Функция, заданная уравнением  называется *неявной* ( явно не выражается через ). Примеры неявно заданных функций:

1. ;
2. ;
3. .

При дифференцировании функций, заданных неявно, считают  – *независимой переменной*, а  – *сложной функцией* от . Для нахождения производной от  по  необходимо продифференцировать обе части уравнения  по  и из полученного уравнения, линейного относительно , выразить . В результате получаем выражение производной от неявной функции в виде .

***Пример 1*.** Найти производную функции:

а) ;

б) .

*Решение.* ▲ а) Функция  задана неявно. Дифференцируем по  обе части равенства . Получим:

.

Таким образом, .

б) Функция  также задана в неявном виде. Дифференцируя по  обе части равенства , получим:

 или .

Отсюда

.

Окончательно получаем

. ▲

Пусть уравнение  определяет  как неявную функцию от , и пусть найдена первая производная этой функции . *Вторую производную*  функции, заданной неявно, получаем, дифференцируя функцию  по переменной  и считая при этом  сложной функцией от :



Заменяя здесь  на , получаем выражение второй производной через  и :

.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего и более высоких порядков.

***Пример 2.*** Найти , если .

*Решение.* ▲ Продифференцируем обе части данного равенства, считая  функцией от :

.

Отсюда

.

Тогда

.

Дифференцируя последнее равенство по переменной  и считая при этом  сложной функцией от , имеем:

.

Подставив в последнее равенство вместо  его выражение, получим:

.

Так как из условия , а , то окончательно имеем:

. ▲

**Производная функции, заданной параметрически**

Пусть зависимость между аргументом  и функцией  задана параметрически в виде двух уравнений



где  – некоторая переменная, называемая *параметром*.

Если функция  имеет обратную , то, подставляя последнее равенство в выражение , получим явную зависимость  от : . Тогда, если  и  имеют в точке  производные  и , причем , то параметрически заданная функция  также имеет в точке  производную, причем

.

Действительно, .

Найдем вторую производную функции, заданной параметрически.

, т.е.

.

Аналогично получаем



***Пример 3.*** Найти  и , если

.

*Решение.* ▲ По определению первой производной для функции, заданной параметрически, получаем:

.

Тогда, по формуле для второй производной, имеем:

. ▲